

Los métodos de programación lineal aplicados al análisis en rotura: el caso de los arcos de fábrica.

Jaime Cervera Bravo. Dr. Arquitecto.
jaime.cervera@upm.es
Universidad Politécnica de Madrid

v1.0 Junio de 2010

Resumen

En este trabajo se presenta una formulación que permite aplicar los métodos de programación lineal, y en particular el método simplex, al análisis de la estática de rotura de cualesquiera estructuras de barras o elementos lineales, que son considerados como bloques rígidos en las regiones no plastificadas. La formulación permite integrar criterios robustos de seguridad y permite abordar, entre otros, los problemas clásicos de rotura de arcos de fábrica, siendo capaz de determinar las alteraciones pésimas a las configuraciones de carga consideradas, basándose en dichos criterios. Como ejemplo se muestra cómo la formulación es capaz de detectar de forma automática que se producirán daños en arcos de fábrica si se procede a su descarga.

Palabras Clave: Estática, rotura, superficie límite, simplex, programación lineal, arcos de fábrica.

In this paper a formulation is presented which applies linear programming methods, in particular the simplex method, to static analysis of the collapse of any structure formed by linear elements, which are considered as rigid blocks in the regions without yield. The formulation can integrate robust security criteria and allows the solution, among others, of the classic problem of masonry arches failure, being able to find the worst load changes to the actual load configuration, based on those criteria. An example is shown in which the formulation is capable to automatically detect that discharge on masonry arches will ensure damage in them.

Keywords: Statics, failure, yield surface, simplex, linear programming, masonry arches.

1. Introducción

Desde que en 1947 George E. Dantzig ensambló las piezas necesarias para aportar un algoritmo general para la solución de los problemas llamados de *programación lineal*¹, han sido numerosas las propuestas de aplicación del algoritmo a la determinación de las configuraciones de rotura en estructuras de barras, inicialmente cerchas [3], posteriormente vigas [4], y más tarde arcos [6], entre otros tipos de problemas, a los que cabría añadir los de *síntesis* o dimensionado, de peso mínimo, etc.

¹de optimización para funciones *objetivo* de carácter lineal, estando sometidas las variables del problema considerado a restricciones de igualdad o desigualdad también lineales

El algoritmo simplex en sus diversas versiones ha resultado ser uno de los más productivos de las teorías matemáticas del pasado siglo XX. Desarrollado por George B. Dantzig en 1947 para la planificación de actividades de la Fuerza Aérea de los EEUU, es actualmente uno de los elementos canónicos básicos de las teorías económicas y de la planificación de las grandes corporaciones industriales. Véase [5]. La generalidad de uso del algoritmo hace que sea una de las herramientas estándar en los paquetes numéricos informáticos disponibles en muchos contextos, tanto de los especializados, como en los de propósito general².

Y la existencia del algoritmo supone de hecho, cara a la teoría de rotura, un cierto equivalente a lo que supone la existencia de los algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales cara a la teoría elástica de análisis de estructuras.

Sin embargo, la diversidad de enfoques empleada —que puede observarse al repasar el artificio usado por Livesley en [6] para formular los problemas de rotura de arcos— confrontada a la generalidad, la unidad teórica y la productividad de los enfoques del análisis elástico, que han dado paso al método de los elementos finitos, han apartado dichos procedimientos de la práctica habitual, así como de los programas de enseñanza.

Sin embargo es posible destilar una formulación general y consistente capaz de abordar todo tipo de problemas de *plasticidad asociada*, como nuestro aquí. Para ello establezco en un primer apartado el conjunto de principios y ecuaciones disponibles, mostrando su empleo para la materialización de soluciones a diversos tipos de problemas. Aplico posteriormente las herramientas obtenidas al análisis de las condiciones de rotura de estructuras de barras, considerando éstas como agrupaciones de bloques rígidos entre las regiones de enlace, que son las únicas en las que se supone que podrá producirse la plastificación. Finalmente aplico la formulación obtenida a las estructuras de fábrica, sin resistencia en tracción, obteniendo las configuraciones de rotura de un arco concreto para diversas condiciones de carga y de resistencia.

2. Elementos básicos del análisis en rotura

2.1. Teoremas fundamentales

El enunciado de los teoremas fundamentales del análisis límite, cuya demostración aplicada a los problemas de plasticidad asociada no desarrollaré por ser ampliamente conocida [9], puede ser como sigue:

Teorema 1 (Teorema estático o del límite inferior) *Si en una estructura, para un sistema de cargas dadas*

- *puede establecerse un estado de tensiones o esfuerzos internos en equilibrio, y*
- *para dichos esfuerzos no se alcanza la condición de rotura o plastificación completa*

²ya sea por estar directamente contenido en el paquete básico —como en las herramientas de álgebra simbólica tipo Maple, Mathematica o Maxima— sea por estar disponible como complemento o rutina descargable —como en versiones antiguas del paquete de ofimática OpenOffice— Está disponible en las versiones más recientes de las hojas de cálculo habituales: Excel 07 >Datos >Análisis >Solver ; OpenOffice 3.x >Herramientas >Solver

entonces la estructura no colapsa para dichas cargas, o lo que es lo mismo, las cargas dadas suponen un límite inferior a la carga de rotura de la estructura.

Para que el teorema sea de aplicación, no deben producirse fenómenos de inestabilidad (pandeo), y las secciones que plastifican deben presentar ductilidad suficiente para que se produzcan deformaciones plásticas apreciables sin rotura.

Teorema 2 (Teorema cinemático, o del límite superior) *Es el dual del anterior: si para un esquema de colapso compatible arbitrariamente establecido se determinan cargas que pierden en dicho colapso tanta energía como la que se disipa en la deformación plástica, puede asegurarse que la estructura colapsará bajo dichas cargas, o lo que es lo mismo, que tales cargas constituyen un límite superior para la carga de rotura de la estructura.*

Como en el caso del análisis elástico, los dos teoremas precedentes suponen una visión dual del problema, cuya concurrencia determina una solución completa del problema, hiperestático en general.

Teorema 3 (Teorema de unicidad) *En el caso de que se cumplan las condiciones de los dos teoremas precedentes, a saber,*

- *que exista un estado equilibrado de esfuerzos con las cargas actuales.*
- *que los esfuerzos sean en cualquier región de la estructura iguales o menores a los que provocan la plastificación de dicha región*
- *que exista un estado de colapso cinemáticamente compatible cuyas rótulas —o regiones en flujo plástico— se correspondan con las posiciones en las que el esfuerzo es igual al de plastificación*

puede asegurarse que la carga considerada es la carga de rotura de la estructura,

pues efectivamente, al coincidir en un mismo objeto el límite superior y el límite inferior, dicho objeto debe ser la carga de rotura.

Hay que hacer notar que las condiciones del teorema de unicidad reproducen en el análisis plástico las tres condiciones que se usan en análisis elástico para determinar las soluciones, a saber

- **EQUILIBRIO:** la *admisibilidad estática*, por la que el estado de esfuerzos está equilibrado con las cargas,
- **COMPATIBILIDAD:** la *admisibilidad cinemática*, por la que la geometría de colapso es compatible, y
- **RESISTENCIA:** que también podríamos denominar condiciones de *congruencia material* o *admisibilidad material*, por la que los esfuerzos son los que provocan la plastificación en las regiones en que se postula dicho estado, y menores a éstos en el resto de la estructura.

De este modo, la solución —única— al problema planteado se obtiene cuando confluyen las tres condiciones.

2.2. Ecuaciones

A partir de los teoremas fundamentales del método podemos derivar procedimientos de solución aplicados al estudio de las estructuras de barras en las que podemos plantear tanto las condiciones de carga —y de

equilibrio— como la cinemática de colapso —y su compatibilidad— en forma discreta, referidas a un número finito de secciones prefijadas en las que consideremos la posibilidad de aparición de rótulas o deformaciones plásticas.

Para ello vamos a escribir las ecuaciones de que disponemos

- Usamos \mathbf{F} para las cargas, que estarán equilibradas por los esfuerzos \mathbf{f} de las secciones elegidas para representar el problema, siendo la condición de EQUILIBRIO:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (1)$$

Hay que señalar que si hemos establecido a priori un dimensionado para la estructura, lo habitual será que no conozcamos inicialmente ni las cargas \mathbf{F} , que deben ser las de rotura, y que buscamos sean superiores o iguales a las aplicadas a la estructura, ni los esfuerzos que las equilibran \mathbf{f} , aunque si hemos definido cómo se representan, sí podremos establecer \mathbf{H} sin dificultad. Una forma habitual de plantear el problema consiste en prefijar un vector de carga dado \mathbf{F}_I y buscar el factor de carga γ correspondiente a la condición de equilibrio en el instante de la rotura: $\gamma\mathbf{F}_I = \mathbf{H}\mathbf{f}$. Volveremos sobre ello.

- Usamos \mathbf{U} para los movimientos de la estructura necesarios para describir las posibles cinemáticas de colapso, de los que pueden deducirse por COMPATIBILIDAD las deformaciones plásticas \mathbf{u} de las secciones implicadas en cada geometría de colapso, ignorando las deformaciones elásticas, que no variarán en el proceso. Para movimientos pequeños:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2)$$

con $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$ como sabemos que sucede si se representan de forma concordante tanto cargas y movimientos como esfuerzos y deformaciones. En dicha expresión, tanto \mathbf{u} como \mathbf{U} representan *velocidades* o diferencias de deformación y movimiento entre dos estados sucesivos en el movimiento de colapso.

- Definimos finalmente las condiciones de RESISTENCIA, las que identifican las condiciones de plastificación o, en la analogía usada para describir éstas, las que definen a la superficie límite de rotura, mediante un sistema de inequaciones o desigualdades para los esfuerzos³ en la forma:

$$\psi\mathbf{f} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0} \quad (3)$$

Cada fila de la anterior expresión matricial contiene una expresión lineal que representa una de las condiciones límite correspondiente a los esfuerzos o combinaciones de esfuerzos \mathbf{f} asociados a los coeficientes no nulos de dicha fila. La expresión 3 es, por lo tanto, una aproximación a las condiciones de plastificación que representa la posible superficie límite no lineal mediante un conjunto finito de condiciones lineales o hiperplanos⁴. En dicha aproximación cada término de \mathbf{r} representará, bien una resistencia aislada —una capacidad

³representando usualmente las sollicitaciones y las correspondientes resistencias en formas agregadas: en barras los usuales esfuerzos normal, cortante y momento, y las condiciones derivadas de los correspondientes diagramas de interacción.

⁴Ejemplo típico es el de la comprobación de la resistencia a flexocompresión de una sección simétrica metálica que, de acuerdo a las directrices establecidas en los códigos europeos, se

resistente— si ψ tiene un único término no nulo en la fila considerada, bien un coeficiente que establece un límite a las condiciones de interacción entre varias capacidades resistentes en el caso de que ψ tenga varios términos no nulos en dicha fila.

Es útil señalar que los términos de cada fila de ψ representan —para módulo unitario— las componentes del versor perpendicular al correspondiente plano de rotura, siendo por ello $\psi \mathbf{f}$ las proyecciones de los esfuerzos sobre cada una de dichas direcciones mientras que los términos de \mathbf{r} representan las distancias desde el origen, que corresponde al vector de esfuerzos nulo, hasta dichos planos, distancias medidas en las direcciones definidas por tales versores.

Por razón de la *regla de flujo de von Mises*, que está en la base de los teoremas arriba enunciados, las deformaciones en el proceso de rotura deben ser ortogonales a las variaciones de esfuerzos plásticos, es decir, deben ser perpendiculares a la superficie de rotura. Por lo tanto se describen de una de las dos maneras siguientes: si el estado límite se da para una sola de las condiciones descritas por las ecuaciones de resistencia, es decir, si sólo hay un plano activo en la situación de rotura considerada, se representará con un vector paralelo a uno de los versores de los planos que la aproximan; si la rotura corresponde a una arista o un vértice de la superficie considerada, es decir, si el límite se da simultáneamente para varias de las condiciones límite, se describirá con vectores obtenidos por combinación lineal de los de los planos activos simultáneamente pues en ese caso la deformación puede orientarse en cualquiera de las direcciones del ángulo contenido entre las perpendiculares a los planos que confluyen en esa posición. Como el vector debe orientarse hacia el exterior de la superficie lo anterior puede expresarse en la forma siguiente:

- Regla de flujo: en la condición de rotura la (velocidad de) deforma-

realiza con expresiones de la forma

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \leq 1$$

Si consideramos la posibilidad de signos variados tanto en el normal (tracción o compresión) como en el momento, la expresión anterior es en realidad de la forma

$$\frac{|N|}{N_R} + \frac{|M|}{M_R} \leq 1$$

en la que se dejan implícitos los subíndices eliminados al no inducir a confusión, y donde tanto N_R como M_R son positivos.

La anterior ecuación puede expresarse como

$$|N|M_R + |M|N_R \leq N_R M_R$$

$$|N|m_R + |M|n_R \leq N_R m_R$$

usando $n_R = N_R / (\sqrt{N_R^2 + M_R^2})$, $m_R = M_R / (\sqrt{N_R^2 + M_R^2})$.

Dicha expresión no es otra que el conjunto de las cuatro comprobaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} m_R & n_R \\ -m_R & n_R \\ -m_R & -n_R \\ m_R & -n_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} N_R m_R$$

que está, como se ve, en el formato apuntado, y que puede generalizarse sin dificultad al conjunto de todas las secciones consideradas para el análisis de una estructura completa, al igual que puede generalizarse a otras condiciones de resistencia.

ción es ortogonal a la superficie límite.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \quad (4)$$

En dicha expresión, cada columna de $\boldsymbol{\psi}^T$ es uno de los versores de los hiperplanos que definen la superficie límite, y $\boldsymbol{\lambda}_p$ es una lista de multiplicadores (un vector columna) que tendrán valor positivo si el correspondiente hiperplano es activo, y valor nulo si no lo es. La expresión es efectivamente una forma de representar una combinación lineal de los versores de los planos activos —de las ecuaciones que expresan plastificaciones efectivas—, combinación que está situada en el cono que define las deformaciones posibles en el colapso si se restringen los $\boldsymbol{\lambda}_p$ a valores positivos.

Si multiplicamos escalarmente cada una de las ecuaciones (3) que expresa uno de los planos de la superficie límite por el correspondiente multiplicador tendremos sistemáticamente un valor nulo dado que, o bien el plano es activo y por lo tanto la correspondiente fila de la ecuación debe ser nula y el multiplicador no nulo, o bien el plano no es activo, y la fila será entonces no nula —y menor a cero— pero en ese caso deberá ser nulo el multiplicador.

Tenemos, pues, que los planos activos están asociados a la condición (de colapso) siguiente:

$$(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda}_p = 0 \quad (5)$$

Podemos aplicar finalmente el teorema cinemático, que establece que si en un movimiento de colapso que podamos imaginar —que sea admisible— se iguala el trabajo desarrollado por las cargas en dicho movimiento a la disipación de energía plástica que se produce en las secciones que suponemos plastifican, puede asegurarse que las cargas corresponderán a una cota superior a las que resiste la estructura. Esto puede expresarse en la forma

$$\mathbf{U}^T \mathbf{F} \geq \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (6)$$

En dicha expresión la situación de igualdad se dará si se cumplen también las condiciones del teorema estático, es decir, si las cargas y esfuerzos están en equilibrio y no hay región alguna del cuerpo en el que se supere la condición de resistencia.

2.3. Obtención de soluciones

2.3.1. Cinemática de colapso

Vamos a obtener las ecuaciones que resuelven el problema desde la perspectiva cinemática. Para ello aplicamos la condición de admisibilidad material descrita por la regla de flujo 4 al desarrollo de la ecuación que caracteriza los planos de rotura activos 5, combinada con la condición dada por el teorema cinemático 6 obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &= 0 \\ \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &= 0 \\ \mathbf{F}^T \mathbf{U} - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &\geq 0 \end{aligned}$$

Si añadimos la ecuación de compatibilidad 2 substituyendo en ella las deformaciones por su valor tal como lo determina la regla de flujo 4 ten-

dremos finalmente el conjunto de condiciones que caracteriza a la solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{U} &\geq \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

Las ecuaciones 7 expresan la afirmación del teorema cinemático y la condición de compatibilidad en función de las variables globales de carga y movimiento y de los multiplicadores que localizan las posiciones de rotura —y que expresan su deformación plástica, como se deduce de la primera ecuación, que mide energías disipadas— Las ecuaciones permiten deducir soluciones a problemas típicos de análisis plástico.

Si por ejemplo suponemos conocidas las resistencias \mathbf{r} , representamos la carga en función de un factor de carga γ en la forma $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$, para un vector de carga prefijado \mathbf{F}_I , y normalizamos el desplazamiento⁵ de forma que $\mathbf{F}_I^T \mathbf{U} = 1$ tendremos que las ecuaciones anteriores equivalen al problema de hallar los \mathbf{U} , $\boldsymbol{\lambda}_p$ que minimizan el factor de carga $\gamma = \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p$ para las condiciones lineales dadas:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p) \\ \mathbf{F}_I^T \mathbf{U} &= 1 \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

Dicho problema no es más que un problema de programación lineal, resoluble con las herramientas de dicho campo de la matemática, y en particular con el algoritmo *simplex* ya citado.

Análogamente puede hacerse si las cargas derivan de una combinación como $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \gamma \mathbf{F}_I$ con una parte constante y otra creciente, caso en el que normalizando análogamente tendríamos

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \mathbf{F}_0^T \mathbf{U}) \\ \mathbf{F}_I^T \mathbf{U} &= 1 \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

Cualquiera de los problemas anteriores propone obtener los movimientos que, manteniendo la compatibilidad, corresponden a la condición de colapso para el menor factor de carga que lleva la estructura a la rotura. La solución al problema de programación lineal —de minimización— permite obtener simultáneamente el factor de carga —que es la función *objetivo* del problema— y los vectores \mathbf{U} y $\boldsymbol{\lambda}_p$ que definen, el primero los movimientos generalizados de la estructura en el colapso, el segundo las *deformaciones* de las secciones representadas en el modelo de resistencia en dicho proceso de colapso, es decir las deformaciones plásticas de las secciones que rompen.

⁵Ya hemos dicho que el desplazamiento en colapso suele medirse como *velocidad*, al tratarse de un proceso continuado e irrefrenable en el que cada incremento no es más que una ampliación del movimiento anterior, por lo que es habitual usar un factor de referencia común para todos los movimientos. Éstos se expresan como *modo*, o en forma adimensional, proporcional, siendo el factor común el que puede expresar la evolución de la deformación en el tiempo.

Conocidos los movimientos, es posible reconstruir los esfuerzos de la estructura, dado que pueden obtenerse ecuaciones suficientes para ello. Efectivamente,

- el factor de carga identifica la carga actuante \mathbf{F} , y
- a las ecuaciones de equilibrio pueden añadirse ahora las de resistencia de las secciones *activas*, o que plastifican, que ahora son conocidas.

2.3.2. Dualidad: Estática de colapso

Resulta de sumo interés analizar ahora las implicaciones que las condiciones de dualidad comunes a todos los problemas de programación lineal suponen para el problema que estamos analizando⁶.

Para ello reescribimos las ecuaciones 8 en otro formato más compacto, unificando la expresión de las restricciones para todas las variables del problema. Tendremos el problema allí enunciado, que la literatura matemática denomina *primal*:

$$\begin{aligned} \min \left(\gamma = [\mathbf{r}^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \lambda_p \\ U \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \psi^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_p \\ U \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

Se trata en éste de determinar la configuración de colapso que hace mínima la disipación, respetando las condiciones de compatibilidad, y para un formato normalizado en la velocidad de desplazamiento.

El problema *dual* del anterior, de acuerdo a los principios de las teorías de programación lineal no es otro que el

$$\begin{aligned} \max \left(\Gamma = [\mathbf{0}^T \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Gamma &\geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

En dicho problema, las variables de *decisión* pueden identificarse con los esfuerzos \mathbf{f} y el factor de carga Γ . El problema propone hallar los esfuerzos correspondientes al máximo factor positivo Γ que, aplicado a las cargas, permite que éstas alcancen el equilibrio con los esfuerzos, sin que éstos

⁶Para más detalles véase cualquier texto de programación lineal, o de programación lineal y no lineal —de optimización— como pueden ser [7] o [8]. En [5] se destaca el papel de Von Neumann en la formulación del teorema de dualidad. En general el problema de minimización

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \right) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tiene como dual el de maximización

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \left(\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \right) \\ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

superen las condiciones de resistencia. Puede comprobarse que, efectivamente, los grupos de ecuaciones que corresponden a las restricciones son precisamente las de resistencia y las de equilibrio⁷.

Este enfoque permite por tanto obtener directamente tanto los esfuerzos como el factor de carga de rotura de la estructura para la configuración de cargas elegida \mathbf{F}_I .

Se trata de la formulación directa del problema de maximización que se deriva de aplicar el teorema estático, puesto que se formula explícitamente tanto el equilibrio como la no violación de la condición de resistencia, lo que asegura que la carga de rotura es superior a la considerada. Esto justifica la formulación del problema como un problema de maximización: se trata de hallar la mayor carga que cumple simultáneamente con ambas condiciones.

La confluencia de las soluciones de ambos problemas 10 y 11 en una solución única, con $\min(\gamma) = \max(\Gamma)$, cota superior la primera, cota inferior la segunda, es consecuencia del teorema de unicidad, aunque también de los teoremas paralelos de dualidad descritos en la literatura de la programación lineal.

Resulta finalmente muy interesante reseñar que γ expresa la energía disipada por las resistencias en el movimiento de colapso normalizado: es la disipación plástica en dicho movimiento. De la expresión con la que se calcula en 8 puede verse con claridad que la mejora en la carga de rotura —en el factor de carga— será más eficaz si se interviene mejorando las resistencias de \mathbf{r} para las que las deformaciones λ_p resulten mayores. Dicha información, claramente visible en la formulación cinemática del problema no está disponible, en cambio, en la solución que aporta la formulación estática del problema.

Nótese que si aplicamos la dualidad a la segunda forma 9 de plantear el problema, llegaremos a una solución estática en que el factor de carga se aplicará sólo a la parte variable de la carga

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{f}, \Gamma} (\Gamma) \\ & \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \\ & \Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2.3.3. Factor de carga *robusto*

En [2] se presenta una forma de tratar el problema de la seguridad como medida del alejamiento del vector de esfuerzos al punto más próximo de la superficie de rotura, descomponiendo para ello el vector \mathbf{f} en la suma de un término *central* más uno *adicional*: $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_a$. El término central buscará alcanzar el punto más lejano a la superficie límite, el punto de máxima seguridad para la configuración estructural dispuesta, y el adicional representará la desviación respecto a éste que suponen los esfuerzos debidos a las cargas reales que, por tanto, los acercan a dicha superficie límite. Dicho enfoque permite tratar de modo consistente cualquier problema de seguridad, incluso aquellos en los que las condiciones de rotura son próximos a estados de carga reducida, problemas considerados a menudo en la literatura como de *estabilidad*, pero que con dicho enfoque quedan integrados en un modelo único con los problemas de resistencia.

⁷Cabe señalar que aunque tras aplicar la dualidad en la forma general las ecuaciones de equilibrio quedan formuladas en términos de inecuación, pueden restringirse fácilmente a igualdades estrictas

Dado que las ecuaciones de equilibrio permiten pasar de esfuerzos a cargas, a pesar de que en problemas no lineales no se cumple el principio de superposición —ligado al estado completo en tensiones y deformaciones— sí que es posible descomponer y superponer estados de equilibrio, por lo que si somos capaces de determinar las dos partes del esfuerzo señaladas en el anterior párrafo, dichas componentes nos permiten determinar dos componentes en las cargas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_a$, con $\mathbf{F}_c = \mathbf{H}\mathbf{f}_c$ y $\mathbf{F}_a = \mathbf{H}\mathbf{f}_a$, lo que puede permitir determinar con facilidad el que hemos denominado en el artículo citado *coeficiente robusto de seguridad*. Para ello habrá que resolver el problema descomponiendo la estática del colapso entre dos partes, una constante correspondiente al *centro* o situación de carga de seguridad máxima, y otra variable medida como alejamiento de esa situación central.

Debemos pues ser capaces de obtener en primer lugar el punto⁸ a que corresponde el *centro* o lugar más lejano a la superficie de rotura.

Partimos de la estática de colapso, con las ecuaciones de resistencia en la forma de 3:

$$\psi \mathbf{f} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0}$$

Cada una de dichas ecuaciones, en la escala adecuada, contiene la fila de ψ que representa el versor del plano límite establecido por dicha ecuación, y el término de \mathbf{r} que representa en ese caso la distancia de dicho plano al origen. De este modo, la diferencia a cero representa precisamente el margen disponible en la misma escala de \mathbf{r} . Si introducimos para cada ecuación i la variable de *holgura* $z_i \geq 0$, de tal modo que la inecuación se exprese en términos de igualdad ($\psi_{ij}f_j + z_i - r_i = 0$ para la ecuación i , o $\psi \mathbf{f} + \mathbf{z} - \mathbf{r} = \mathbf{0}$ en formato que representa el conjunto de todas ellas) resultará que los términos de \mathbf{z} representan precisamente las *distancias* o márgenes, las holguras disponibles en el efecto de los esfuerzos \mathbf{f} hasta alcanzar el límite de resistencia \mathbf{r} establecido por los diferentes planos que definen la superficie límite. Determinar el *centro* no es por ello otra cosa que obtener el conjunto de esfuerzos \mathbf{f}_c que cumpliendo dichas ecuaciones maximizan la menor de las holguras.

Es útil la analogía geométrica de las ecuaciones: si pensamos en el caso bidimensional representado en la figura 1, cada inecuación expresa una recta límite que, junto con las demás, define el polígono que acota el recinto *seguro*, y si consideramos las igualdades, los valores de z_i describen para cada condición de resistencia la holgura de seguridad. Si a cada esfuerzo asociamos el menor valor de todos los z_i estaríamos dibujando un conjunto de *curvas de nivel* de la holgura de seguridad en el recinto. Si extendemos la representación bidimensional con una dimensión z adicional correspondiente precisamente al mínimo de z_i para el esfuerzo considerado el polígono que define el recinto pasa a ser el corte plano de un poliedro en el que la dimensión adicional representa dicho margen u holgura. El interior de dicho poliedro representa valores en dicho margen menores a los realmente existentes para el correspondiente esfuerzo, margen que está precisamente definido en la superficie del poliedro, en el primero de los planos alcanzados. El exterior del poliedro representa situaciones en las que no hay seguridad para algunas de las condiciones originales. El problema es por tanto buscar el máximo en dicho margen, y por tanto el máximo en la cota de z en dicho poliedro.

De este modo el problema contiene ahora una variable de decisión más:

⁸o la región, en caso de ser ésta *paralela* a la región más próxima de la superficie de rotura. Más adelante analizamos el problema con más detalle.

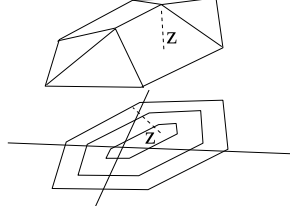


Figura 1: Centro de la región de resistencia

a las \mathbf{f}_c se debe añadir la z , cuyo valor debe ser en todo caso menor o igual al expresado en todas y cada una de las ecuaciones anteriores, puesto que debe encontrarse en el interior del poliedro descrito.

En lenguaje más formal, se trata de buscar el punto y la holgura al que corresponde la mayor de las holguras posibles en las ecuaciones de resistencia, lo que puede expresarse como

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{f}}{\text{máx}}(z) \\ & \psi \mathbf{f} + z \cdot \mathbf{1} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\mathbf{1}$ es una matriz columna de valores unidad de igual número de filas que el de ecuaciones. La solución con *simplex* a dicho problema determina un punto $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c$ que corresponderá a un punto de esfuerzos de distancia máxima a la superficie de rotura.

Hay que tener en cuenta que el algoritmo *simplex* determina siempre un vértice, cuando puede ser que la región central resulte ser más amplia en caso de ser paralela al plano de rotura más cercano. En este caso al descomponer el vector de esfuerzo en la parte *central* más la *adicional* puede resultar que la componente *adicional* no sea ortogonal a dicho plano límite, sino oblicua al mismo, por haberse seleccionado, de entre la región central *paralela* al plano límite, un punto —extremo— en vez del que resultaría más cercano al del esfuerzo que se pretende descomponer. En dicho caso, y si nos ceñimos a dicho plano límite, resultaría de todos modos que, por el teorema de Tales, las proporciones entre la holgura y la propia componente adicional son las mismas en el vector oblicuo que las que mantienen en el vector ortogonal que sería solución correcta del problema. De este modo el *margen de seguridad* que se obtendría sería correcto, aunque pueda no serlo el punto representativo de la rotura obtenido al ampliar en dicho margen la diferencia entre el estado inicial y el estado *central* determinado. Esta cuestión exigirá un desarrollo ulterior.

Resuelto este primer problema, tendremos como aproximación al margen robusto de seguridad el que resuelve un segundo problema definido a partir de la descomposición.

Se tratará ahora de buscar el límite a las cargas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \Gamma_c \mathbf{F}_{a1}$ con $\mathbf{F}_c = \mathbf{H} \mathbf{f}_c$ y siendo $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$. Las cargas \mathbf{F}_c serán las que corresponden a la máxima seguridad posible para la estructura, las cargas \mathbf{F}_{a1} designarán la componente que se aleja de dicha seguridad máxima, y Γ_c el coeficiente o margen de seguridad buscado. Las ecuaciones de equilibrio globales en la situación de rotura estarán ahora en la forma $\mathbf{B}^T \mathbf{f}_a = \mathbf{F}_a = \mathbf{F} - \mathbf{F}_c = \Gamma_c (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_c)$ partiendo de las cargas originales $\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{a1}$ sabiendo que deberá ser $\mathbf{F}_{a1} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_{a1}$ para los esfuerzos *diferencia* o *adicionales*.

Por otro lado, las ecuaciones de resistencia pueden escribirse en la forma $\psi \mathbf{f} = \psi(\mathbf{f}_c + \mathbf{f}_a) \leq \mathbf{r}$, es decir $\psi \mathbf{f}_a \leq (\mathbf{r} - \psi \mathbf{f}_c)$.

Tenemos por tanto el problema de maximización

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{f}_a} (\Gamma_c) \\ & \psi \mathbf{f}_a \leq \mathbf{r} - \psi \mathbf{f}_c \\ & [-\mathbf{B}^T \quad \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \Gamma_c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ & \Gamma_c \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

que también puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{f}_a} \left(\Gamma_c = [\mathbf{0}^T \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \Gamma_c \end{bmatrix} \right) \\ & \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_c \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \Gamma_c \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{r} - \psi \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \Gamma_c \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

siendo $\mathbf{F}_c = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_c$.

Se trata nuevamente de un problema de maximización que puede resolverse con el mismo algoritmo, y que como se ve, es idéntico al 11 salvo por el desplazamiento a la posición *central* representada por $\mathbf{f}_c, \mathbf{F}_c$.

Si observamos la figura 2, podemos ver que las ecuaciones 11 nos llevan a la primera aproximación del punto *C*, dado que su objeto es explorar ampliaciones al vector de cargas original, y las 14 nos llevarían a la segunda, puesto que buscan ampliaciones a la componente del vector de cargas desviado respecto del *central*. Sin embargo el que llamábamos factor de carga *robusto* en el artículo [2] sería el que corresponde a alcanzar el punto marcado con 3. La reflexión necesaria para determinar este último y valorar su relación con el numerado con 2 supera, sin embargo, las limitaciones de espacio de este trabajo, por lo que nos conformamos con el último obtenido.

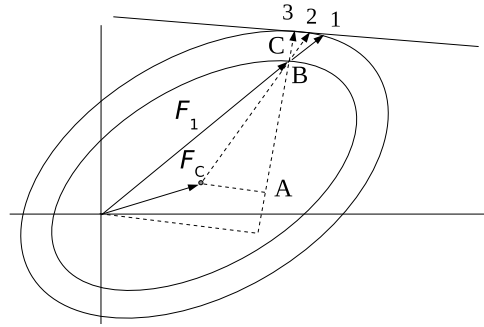


Figura 2: Criterios de seguridad.

2.4. Cargas de rotura y mecanismos de colapso

Me permito aquí hacer una pequeña digresión. Hemos visto en apartados anteriores que el problema de rotura puede formularse desde la pers-

pectiva cinemática o del límite superior, o desde la perspectiva estática, o del límite inferior. Cuando ambos límites coinciden se cumplen las condiciones del teorema de unicidad, obteniéndose la carga de rotura. Si recordamos ambos enfoques teníamos, en el primero, el problema de minimizar γ para las variables de decisión $\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}$, en la forma de la ecuación 8

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}} \gamma(\boldsymbol{\lambda}) &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} &= 1 \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

y en el segundo el problema de maximizar Γ en la forma de la ecuación 11

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{f}, \Gamma} \Gamma \\ \boldsymbol{\psi} \mathbf{f} &\leq \mathbf{r} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{f} &= \Gamma \mathbf{F}_I \\ \Gamma &\geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

La solución del problema, cuando $\min(\gamma) = \max(\Gamma)$ nos arroja un conjunto de ecuaciones que podremos resumir ahora, usando para la carga de rotura la forma $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$. Para generalizar las soluciones obtenidas observamos que las cargas \mathbf{F} corresponden a las de rotura para una de las direcciones posibles de la acción, la definida por la carga inicial \mathbf{F}_I que se ha hecho crecer hasta el máximo valor \mathbf{F} que la estructura es capaz de soportar para esa *orientación* o combinación de cargas.

Si analizásemos el problema con otra *orientación* inicial \mathbf{F}_{II} llegaríamos a otra solución límite y así sucesivamente, de modo que podemos imaginar la envolvente para todas ellas, definiendo así la capacidad de carga generalizada de la estructura con expresión análoga a la que hemos usado para la del conjunto de las secciones

$$\boldsymbol{\Psi} \mathbf{F} \leq \mathbf{R} \quad (18)$$

La ecuación no es más que la definición de una superficie límite en el espacio de las cargas. Define por tanto la capacidad de carga de la estructura, determinable a partir de su geometría y de las capacidades resistentes definidas para sus secciones. Aunque ésta es cuestión para tratar en otro artículo, podemos extender al espacio de las cargas las reflexiones sobre la condición de colapso, considerando las configuraciones vistas desde la perspectiva global —las configuraciones de carga última y los correspondientes mecanismos de colapso— y relacionar las ecuaciones y parámetros descritos más arriba con los recién formulados. En particular, denotamos con $\boldsymbol{\Lambda}$ al conjunto de los *modos* o configuraciones de colapso que podremos, por mero análisis geométrico, relacionar con los mecanismos activos definidos en $\boldsymbol{\lambda}$ —pues cada modo posible Λ_i definiría el conjunto de multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$ activos en dicho modo mediante expresiones del tipo $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}_i \Lambda_i$ — Para el conjunto de las configuraciones de rotura posibles tendremos expresiones del tipo $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L} \boldsymbol{\Lambda}$. Puede demostrarse que este enfoque llevará a cerrar el conjunto de relaciones que caracterizan las configuraciones y las cargas de rotura desde la doble perspectiva sea interna o global de la estructura, a través de las variables y ecuaciones siguientes

	local	global
fuerzas	solicitaciones \mathbf{f}	cargas \mathbf{F}
movimientos	deformaciones \mathbf{u}	desplazamientos \mathbf{U}
capacidades	resistencias \mathbf{r}	cargas límite \mathbf{R}
configuraciones	rótulas $\boldsymbol{\lambda}$	mecanismos $\boldsymbol{\Lambda}$
COM-EQU	$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$	$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}$
CNF-CAP	$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}\boldsymbol{\Lambda}$	$\mathbf{R} = \mathbf{L}^T \mathbf{r}$
Resistencia	$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{r}$	$\boldsymbol{\Psi} \mathbf{F} \leq \mathbf{R}$
Regla de flujo	$\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$	$\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{U}$
Colapso	$(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda} = 0$	$(\boldsymbol{\Psi} \mathbf{F} - \mathbf{R})^T \boldsymbol{\Lambda} = 0$
Disipación	$\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}$	$\mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Lambda}$

a las que debe añadirse la relación final, de relativamente sencilla demostración, que cierra el conjunto:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T \quad (19)$$

3. Rotura en problemas de barras o bloques rígidos

3.1. Presentación

Un enfoque sistemático capaz de implementarse con generalidad en procedimientos automáticos de cálculo debe permitir tratar cualesquiera problemas en su generalidad mecánica —tipos de rótula posibles y, por tanto, condiciones límite para éstas— y de configuración —organización y enlace de las barras o piezas que forman la estructura—

Sin entrar en el problema del continuo y, manteniendo el enfoque discreto que postula la formación aislada de rótulas, cuyas potenciales posiciones se describen a priori, el problema estará en describir de forma general la forma de construir el modelo completo de una estructura de barras en la que podamos prefigurar los enlaces o posiciones de las potenciales rótulas para poder aplicar a dicho modelo las herramientas de análisis ya establecidas.

Un enfoque de gran calado es el aportado por Livesley en su ya citado artículo sobre análisis límite de estructuras formadas por bloques rígidos [6]. En dicho texto Livesley propone considerar como elementos del análisis las propias juntas, y considerar los bloques rígidos desde la mera perspectiva del equilibrio. O lo que es lo mismo, considerar los bloques como nudos extendidos —*extended nodes*— destinados a conectar las juntas entre sí. Dado que en el colapso plástico de una estructura formada por barras los tramos de éstas que no plastifican se comportan como sólidos rígidos, dicho enfoque resulta completamente general y de gran sencillez. Una dificultad de la propuesta de Livesley consiste en que reduce los esfuerzos generalizados de la junta a cargas equivalentes aplicadas a sus extremos, para facilitar el tratamiento en los límites a dichas cargas. Resulta más general, sin embargo, usar las resultantes habituales —normal, cortante y momento— y referir los límites a éstas.

Por ello presentamos aquí un breve desarrollo de dicho enfoque que permitirá abordar indistintamente el comportamiento de estructuras de barras dúctiles —metálicas en general, aunque también cabrá aplicarlo a barras de hormigón armado en ciertas condiciones— o también el comportamiento de estructuras de fábrica, en condiciones análogas a las establecidas en el citado artículo.

En este enfoque, cualquier barra o región de la estructura que se mueve rígidamente se considera un nudo extenso [1] al que se conectarán tantos elementos como secciones haya susceptibles de plastificar en el contorno de dicha región.

3.2. Nudo y elemento

Tal como se ha dicho, los elementos serán las diferentes juntas o secciones —interfaces— capaces de generar deformaciones plásticas, conectando entre sí regiones amplias que no plastificarán —barras, bloques, nudos o agregaciones cualesquiera de éstos— que consideramos un nudo extenso.

El conjunto de los nudos constituye la estructura, a través de las conexiones formalizadas por los elementos. De este modo los parámetros de carga sobre la estructura y de desplazamiento generalizado de ésta se atribuyen a los nudos.

Cada nudo se caracterizará por un punto representativo de la región considerada y unos ejes propios respecto de los que se medirán cargas y movimientos —estos ejes propios pueden ser usualmente los generales de la estructura, aunque no necesariamente— Como el nudo es amplio, los movimientos rígidos deben representarse por los desplazamientos y rotaciones de toda la región considerada, de modo que los parámetros de carga \mathbf{F} y de desplazamiento de colapso \mathbf{U} de cada nudo tendrán seis componentes en el espacio tridimensional, o tres en el bidimensional.

Cada elemento, o junta, tendrá dos caras a través de las que se conecta a los nudos que pone en contacto. Dichas caras —izquierda y derecha, o caras una y dos— tienen una geometría plana que puede referenciarse a través de las coordenadas de su centro de gravedad, y los ejes que, con origen en éste, definen la perpendicular al plano de la junta y los ejes principales de inercia de la correspondiente sección. Los ejes de las dos caras tienen idéntico origen y orientaciones exactamente opuestas, si bien sus sollicitaciones internas únicas pueden describirse a través de la acción exterior sobre la junta en una cualquiera de dichas caras. En lo que sigue usaremos como ejes de referencia básicos de la junta, y representativos de las deformaciones y sollicitaciones de ésta los de la segunda cara, o cara derecha⁹ o *frontal*, de acuerdo a denominaciones al uso.

De este modo las sollicitaciones \mathbf{f} en la junta pueden describirse igualmente por las resultantes de fuerzas y momentos en dicha cara que, nuevamente, serán —como mucho— seis para situaciones tridimensionales y tres para las bidimensionales, y a las que corresponderán un número idéntico de potenciales deformaciones plásticas \mathbf{u} , entendidas como los movimientos relativos de la cara 2 respecto de la 1 en el proceso de plastificación.

3.3. Ecuaciones de equilibrio

La relación entre los ejes de un elemento —o junta— y los de un nudo corresponde a un doble movimiento: una traslación y una rotación. De tal modo que tenemos la composición de los dos movimientos representados en las ecuaciones 20 y 21.

⁹usando la clásica regla de manejar signos positivos para las direcciones crecientes.

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 - z_0 & -(y_1 - y_0) & 1 & 0 & 0 \\ -(z_1 - z_0) & 0 & x_1 - x_0 & 0 & 1 & 0 \\ y_1 - y_0 & -(x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \\ M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \\ M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Puesto que de lo que se trata es de considerar el equilibrio en los nudos, hemos de representar dichas ecuaciones en la forma en que puedan acumularse los esfuerzos que la junta o elemento aporta para el equilibrio del nodo al que conecta.

Consideremos un nodo conectado a la cara derecha —o creciente— de la junta. Las fuerzas que el nudo ejerce sobre la junta permiten describir los esfuerzos sobre ésta, que representan las solicitaciones de la junta y son la parte de las fuerzas sobre el nodo que se ejercen al exterior del mismo a través de dicha junta: su *contribución*. Dichas solicitaciones estarán lógicamente referidas a los ejes de la junta ya definidos.

Si rotamos la representación de las solicitaciones a ejes coincidentes con los del nodo, y las trasladamos al punto de referencia de éste de acuerdo a las ecuaciones 20 y 21, tendremos la parte buscada de las ecuaciones de equilibrio a que contribuye la junta: $\mathbf{F}_i = \mathbf{H}_{ij} \mathbf{f}_j$ que pueden entenderse como la parte de las fuerzas \mathbf{F} que se ejercen sobre el nodo i que son transferidas a través de la junta j .

Desarrollando la composición de las ecuaciones 20 y 21 tendríamos por tanto, para la contribución de la junta al nodo:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_z y - \alpha_y z & \beta_z y - \beta_y z & \gamma_z y - \gamma_y z & \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_x z - \alpha_z x & \beta_x z - \beta_z x & \gamma_x z - \gamma_z x & \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_y x - \alpha_x y & \beta_y x - \beta_x y & \gamma_y x - \gamma_x y & \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_\gamma \\ m_\alpha \\ m_\beta \\ m_\gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$

siendo $[x, y, z]^T$ las coordenadas del centro de gravedad de la junta en ejes del nodo (y para origen situado en éste) y siendo los ejes de la junta los $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ de modo que α_x representará el coseno director de la dirección α con la x .

La expresión en dos dimensiones es de la forma

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & 0 \\ \alpha_y & \beta_y & 0 \\ \alpha_y x - \alpha_x y & \beta_y x - \beta_x y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ m_z \end{bmatrix} \quad (23)$$

con $z = \gamma$ y donde definido el ángulo $\varphi = \langle x\alpha \rangle$ tendremos $\alpha_x = \cos \varphi$, $\alpha_y = \sin \varphi$, $\beta_x = -\sin \varphi$, $\beta_y = \cos \varphi$.

En el caso de que el nodo conecte a la cara izquierda, bastará cambiar los signos en los términos de proyección de la expresión —usando $-\mathbf{H}^*$ —. Finalmente, si a un nodo conectan varias juntas, bastará sumar al equilibrio del nodo las contribuciones de todas ellas.

De este modo las expresiones matriciales de equilibrio resultantes son del tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1m} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdots & \mathbf{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n1} & \mathbf{H}_{n2} & \cdots & \mathbf{H}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

en la que \mathbf{H}_{ij} expresa la contribución de la junta —columna— j en el nodo —fila— i . Una buena parte de éstas serán matrices cero: en cada columna sólo habrá dos de ellas no nulas, al ser las matrices que expresan la contribución de la junta al equilibrio de cada uno de los dos nodos que conecta, y en dichas dos matrices los términos de fuerza serán idénticos y con signos opuestos —las dos caras opuestas de la misma junta— si bien los términos de momento podrán variar, dependiendo de las coordenadas y direcciones de la junta respecto al nodo considerado.

3.4. Ecuaciones de resistencia

La resistencia de cada una de las juntas deberá expresarse en la forma habitual en el apartado 2.3, o en la forma siguiente, que considera la posibilidad de definir las resistencias generales de las secciones a partir de un número más limitado de *resistencias básicas* \mathbf{r}_b por razones, por ejemplo, como la de unificar secciones entre piezas por consideraciones constructivas:

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{d} \mathbf{r}_b \leq \mathbf{0} \quad (25)$$

Un ejemplo de la forma de $\boldsymbol{\psi}$, \mathbf{d} , y \mathbf{r}_b para secciones rectangulares de materiales sin resistencia en tracción puede ser el descrito en el cuadro 1.

En el ejemplo hemos considerado sólo la interacción resistente de las componentes normales a la sección —momento y normal— pero, sin embargo, en las expresiones que acabamos de manejar estamos considerando también la componente tangencial por resultar imprescindible para la descripción completa del equilibrio de los nodos. Como no es habitual considerar críticas las resistencias en cortadura en los casos habituales, bastaría usar exactamente las mismas expresiones de resistencia ampliadas para incorporar el nuevo esfuerzo sin más que emplear valores nulos en la correspondiente columna de $\boldsymbol{\psi}$ para contabilizar el efecto de dicha sollicitación en la interacción.

Si queremos completo rigor tendremos ahora dos cuestiones a considerar: en primer lugar la definición completa —y más compleja— de las superficies límite considerando todos los esfuerzos. Pero, más importante aún, deberemos también ser conscientes de que el modelo introducido para representar la resistencia en cortadura puede significar la invalidación de la regla de ortogonalidad de los desplazamientos de rotura a la superficie límite —la regla de flujo—, regla que dejará de ser de aplicación si se establecen condiciones de plasticidad no asociada: es exactamente lo que sucederá si se emplean condiciones de resistencia al deslizamiento ligadas a mecanismos de fricción de tipo *Coulomb* como bien hace notar Livesley [6], que atribuye a Drucker la paternidad de la reflexión.

En el caso de las fábricas, añadir resistencias en cortadura proporcionales al normal existente añade a las seis restricciones preexistentes dos más,

Un ejemplo típico de función límite de rotura es el de la figura, que representa las condiciones de rotura de una rebanada rectangular de una pieza sometida a flexocompresión en un material sin resistencia a tracción como puede ser el hormigón o los materiales de fábrica. La doble parábola dibujada puede aproximarse por el hexágono que las envuelve trazando las tangentes en los puntos de máximo y mínimo normal y momento. Cabe hacer notar que en dicho trazado, las tangentes oblicuas tienen una pendiente que es igual que el brazo plástico $z_{pl} = h/2$ de la versión *dúctil* de la sección, lo que puede comprobarse sin más que verificar que el momento máximo es igual al producto de la resistencia de media sección por medio brazo, tal como resulta de las propiedades de la parábola: $M_m = N_m z_{pl}/4$. De este modo las seis comprobaciones representadas en el hexágono, considerando negativas a las compresiones, serán

$$N_m \leq N + \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$

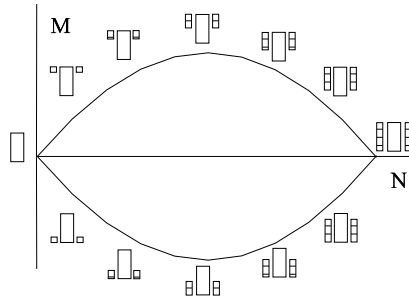
$$N_m \leq N - \frac{M}{z_{pl}} \leq 0$$

$$N_m \leq 4 \frac{M}{z_{pl}} \leq -N_m$$

ecuaciones que pueden reescribirse también en la forma

$$\begin{bmatrix} m & n \\ -m & -n \\ m & -n \\ -m & n \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} |N_m| z_{pl}$$

en las que $n = 1/\sqrt{1 + z_{pl}^2}$, $m = z_{pl}/\sqrt{1 + z_{pl}^2}$, resultando por tanto expresiones que corresponden al formato general de la ecuación 25.



Cuadro 1: Superficie de fluencia en rebanada de material sin tracciones

correspondientes a los dos nuevos planos de rotura por esfuerzo tangente en cualquiera de los sentidos. Con resistencia proporcional al esfuerzo normal y al coeficiente de rozamiento μ las ecuaciones que detallamos en el cuadro 1 quedarían de la forma¹⁰

$$\begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -m & -n & 0 \\ m & -n & 0 \\ -m & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \\ \mu & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |N_m| z_{pl} \quad (26)$$

Cabe señalar en este caso que en la medida en que los problemas serán en su mayoría de estabilidad —la geometría resulta o no viable para las cargas dadas— resultará a menudo adecuado formular el problema en los términos definidos por las ecuaciones 13 y 14.

En el caso de las secciones metálicas, un procedimiento acorde al enfoque del Eurocódigo exigiría añadir ocho nuevas superficies de interacción, cuatro para cada signo del cortante, que corresponderían a los planos definidos por cada una de las rectas límite dibujadas en el plano que representa el estado de cortante igual a la mitad de la máxima resistencia a cortante de la sección, junto con el punto de máxima resistencia a cortante con resistencia nula para momento y normal.

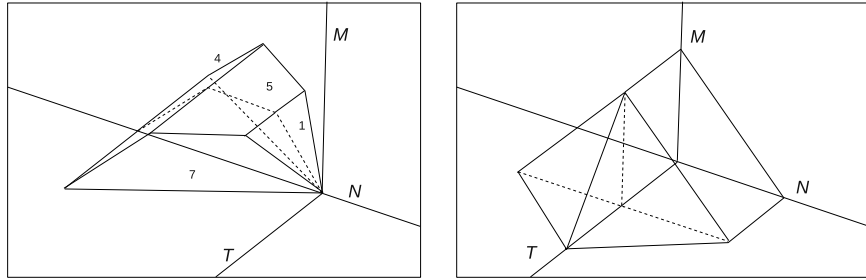


Figura 3: Poliedros de rotura, fábrica o acero. Para la fábrica se indican las ecuaciones a que corresponden las caras visibles

Nótese que en la ecuación 23 los valores de los esfuerzos en la junta son precisamente $f_\alpha = N$, $f_\beta = T$, $m_z = M$ por lo que bastaría renombrarlos y reordenarlos en cualquiera de las dos ecuaciones 23 o 26 para poderlos identificar en el vector de esfuerzos \mathbf{f} atribuido a la junta, quedando por tanto, si se tratase de la junta i una expresión en la forma $\psi_i \mathbf{f}_i \leq \mathbf{r}_i$.

Si ahora queremos considerar el conjunto de las juntas de la estructura, bastará agrupar las expresiones individualizadas de resistencia de cada

¹⁰En la figura 3 se ve que el modelo resulta tal vez grosero en las regiones de fuerte combinación de normal y cortante por su excesiva agudeza. Ésta resultaría algo más acotada si se considera que una resistencia en tracción del 11 % de la de compresión limitaría la resistencia en tensión tangencial —y por ende el coeficiente de rozamiento máximo a considerar en la fábrica— a un tercio de ésta.

junta en una agrupación diagonal de la forma

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

con lo que tenemos las ecuaciones de resistencia 27 y equilibrio 24 en la forma requerida para aplicar la solución descrita en alguna de las formas 11, 12 o 14.

4. Aplicación: rotura de arco de fábrica

Como ejemplo de aplicación consideramos la rotura de un arco de fábrica cuya directriz corresponde a un cuarto de círculo, y cuya cuerda (luz del arco) es de 20 m, con dovelas de 0,5 m. de espesor.

Usamos como condición de resistencia de cualquiera de las juntas la siguiente, que considera una superficie de rotura piramidal y expresa los límites en flexión compuesta, en compresión, y en deslizamiento

$$\begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0,97 \\ 0,24 & 0 & -0,97 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La expresión es *casi* análoga a la de considerar resistencia infinita en compresión y nula en tracción: sólo se diferencia en que se pone un límite a la compresión máxima en la junta, aunque dicha compresión puede ser tan excéntrica como admita la geometría de la junta.

Usamos como condiciones de equilibrio las que siguen, ejemplificadas para la primera dovela, que expresan el equilibrio de las solicitaciones sobre las juntas con las cargas aplicadas —horizontal, vertical y momento—

$$\begin{bmatrix} -0,71 & 0,71 & 0 & 0,76 & -0,65 & 0 \\ -0,71 & -0,71 & 0 & 0,65 & 0,76 & 0 \\ 0 & 0,56 & -1 & 0 & 0,56 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_d \\ T_d \\ M_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_M \end{bmatrix}$$

En estas condiciones consideramos cuatro problemas:

- 1 el del peso propio —suponemos un valor de 10 por dovela— buscando el factor de carga para un incremento en dicho peso, con la formulación de 11
- 2 el del peso propio más una carga puntual de 20 en la dovela número 5, buscando el factor de carga que corresponda a un incremento proporcional de todas las cargas, con la formulación de 11
- 3 el mismo problema anterior, pero con la formulación de 12 para incrementar sólo la carga puntual
- 4 el segundo problema, pero con la formulación *robusta* 14 para determinar la peor alteración en las cargas aplicadas

Los resultados de dichos problemas están en las figuras de 4, en las que se traza el eje que identifica al correspondiente polígono de presiones y se señalan las posiciones correspondientes a los límites de resistencia, posiciones a las que corresponderán las deformaciones plásticas que activan el colapso. Los esfuerzos correspondientes a dichas condiciones límite y el factor de seguridad obtenido se muestran en el cuadro 2. Cabe señalar que, así como en los tres primeros casos puede interpretarse el factor de seguridad como un *factor de carga*, en el último de los problemas el factor de seguridad es, como se ha visto anteriormente, la proporción entre las dimensiones lineales de la geometría de la superficie de rotura y la geometría homóloga a la anterior, una vez contraída hacia el centro —la situación de esfuerzos más alejada posible de la rotura— hasta alcanzar el punto representativo de la carga efectivamente actuante. No es, por tanto un *factor de carga* en los casos en que dicho centro corresponde a una situación de esfuerzos no nula, como es el caso que nos ocupa.

La solución al primero de los problemas, debido a la simetría, exige la activación de la condición de aplastamiento de las juntas de apoyo, pues de otro modo, el arco triarticulado que se deriva de la geometría de las cargas sería estable para un crecimiento proporcional indefinido de éstas.

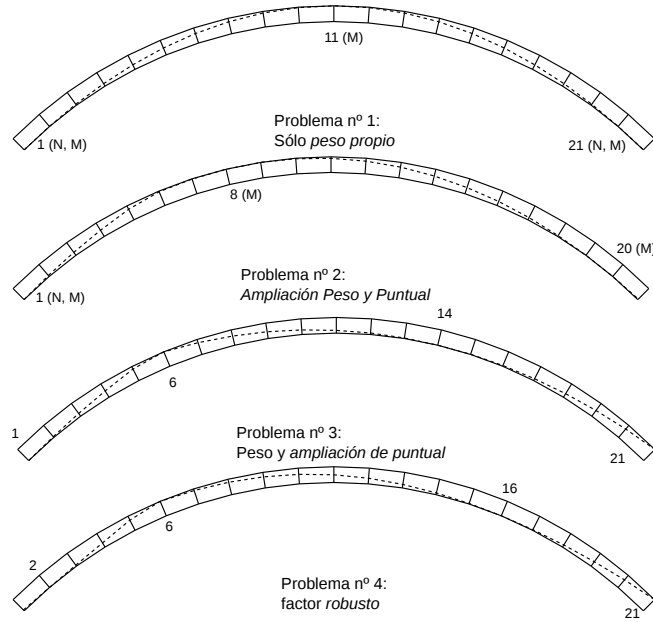


Figura 4: Soluciones a las configuraciones de rotura del arco

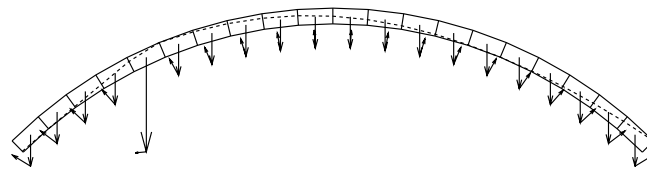


Figura 5: Alteración pésima de la carga original

Resulta muy interesante considerar los resultados del cuarto proble-

Nº	F. seg	Junta	N	T	M
1	3,55	1 (N)	-500	-1,39	-125
		1 (M)	-500	-1,39	-125
		11 (M)	-352,57	0	88,14
		21 (N)	-500	1,39	-125
		21 (M)	-500	1,39	-125
2	3,13	1 (N)	-500	-14,8	-125
		1 (M)	-500	-14,8	-125
		8 (M)	-352,78	0,22	88,2
		20 (M)	-451,62	0,51	-112,91
3	2,87	1 (M)	-210,36	-2,56	-52,59
		6 (M)	-152,28	16,33	38,07
		14 (M)	-151,47	1,49	-37,87
		21 (M)	-179,43	-28,37	44,86
4	1,27	2 (M)	-100,17	-1,86	-25,04
		6 (M)	-60,26	4,18	15,06
		16 (M)	-62,43	1,06	-15,61
		21 (M)	-94,71	-19,46	23,68

Cuadro 2: Factor de seguridad y esfuerzos de rotura en arco

ma: la situación de colapso más cercana a la situación original consiste en descargar parcialmente el arco, variando levemente la orientación de la carga puntual. La descarga más desfavorable es casi radial, y se representa en la figura 5. Dicho resultado no es en absoluto desconocido: es sabido que se han producido daños apreciables, e incluso colapsos, en bóvedas de catedrales góticas a las que se han *limpiado* los rellenos. Lo interesante de la solución aportada es que tal mala práctica puede detectarse prematuramente, incluso aunque no se tuviese sospecha previa ni noticia de ningún antecedente.

Si como alternativa a la condición de resistencia utilizada —que por cierto tiene la propiedad de tener un único punto como *centro*— usamos la condición —que podríamos llamar *hexagonal*— establecida en el cuadro 1, lógicamente deben cambiar apreciablemente los resultados, obteniéndose los de la figura 6.

En éstos se ve que llegar al aplastamiento de las secciones de arranque implica en éstas la ausencia de excentricidad que, por otro lado resulta más reducida en otras regiones que plastifican con flexión y en las que concurre un fuerte efecto de los esfuerzos normales de compresión.

Pero en este caso el *centro* de la superficie de rotura ya no es un punto único, como puede verse si analizamos el diagrama de interacción momento-normal para una de las juntas de la figura 7: la mayor distancia a la región más próxima a los máximos momentos es constante para todo un conjunto de valores diferentes; la solución definida en la última gráfica de la figura 8 corresponde al *centro* obtenido por simplex, que es el punto 1 del diagrama. Si usamos los puntos 2, o 3 de dicha figura obtendremos condiciones de rotura distintas y, por tanto, diferencias para las alteraciones pésimas a la configuración de carga inicial, aunque todas ellas tengan características comunes. Dicha diferencia o inestabilidad aconsejará, al menos como consideración provisional, tratar de manejar condiciones de resistencia que garanticen un *centro* único.

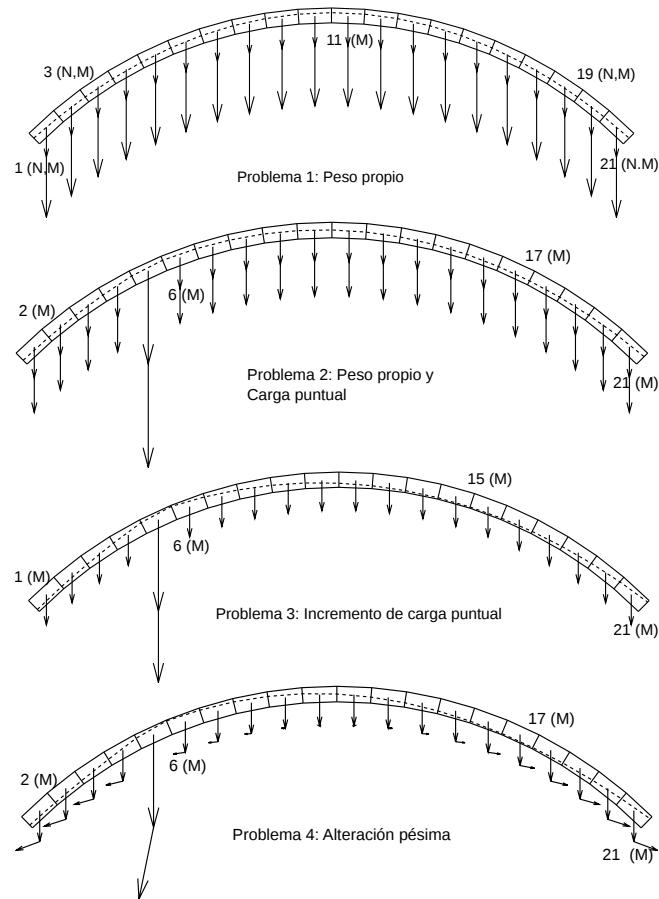


Figura 6: Configuraciones de rotura para ley de resistencia *hexagonal*

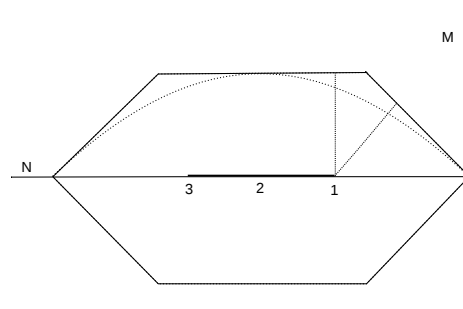


Figura 7: Interacción momento-normal, y posición del *centro*

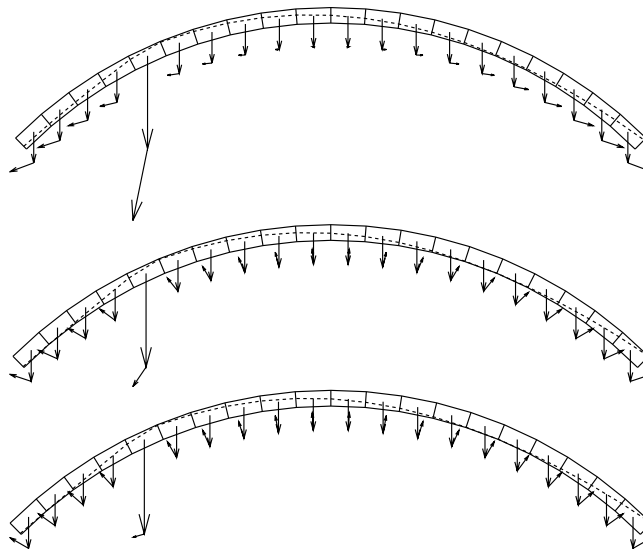


Figura 8: Alteración pésima dependiendo del *centro* considerado

5. Conclusiones

- En este trabajo he presentado una formulación muy general a los problemas de rotura de estructuras de barras, aplicable sin distinción apreciable tanto a las estructuras de materiales metálicos como a las constituidas por materiales sin resistencia a tracción, como son los arcos de fábrica. Dicha formulación se basa en la disponibilidad cada vez más difundida de herramientas para resolver los problemas de *programación lineal*.
- La formulación se basa en atribuir toda la deformabilidad potencial a un conjunto predeterminado de secciones —que pasan a ser las análogas a los elementos en los programas de análisis al uso— que estarán conectadas entre sí a través de regiones rígidas extensas —que cumplen ahora el papel de los nudos en los programas de análisis existentes— Para las primeras se preconizan las condiciones de resistencia, y para los segundos las de equilibrio. La solución puede obtenerse a través de la maximización de la carga capaz de ser soportada por las resistencias definidas, y deriva directamente de la aplicación del teorema estático o del límite inferior; dicha solución resulta ser dual de la del problema ligado al teorema cinemático, o del límite superior, que resolvería la minimización de la carga para la que puede obtenerse una configuración compatible de colapso.
- He mostrado la capacidad que dicha formulación tiene para abordar problemas desde diversas perspectivas de seguridad, que incluyen la de seguridad *robusta*, perspectiva esta última que unifica los problemas de resistencia o de estabilidad de fábricas bajo un mismo enfoque.
- He mostrado, finalmente, que dicha formulación permite abordar sin dificultad la determinación de las configuraciones pésimas de carga para los tipos estructurales a los que puede aplicarse —y en particular a las estructuras de arcos de fábrica—

- En favor de la estabilidad numérica de los resultados, resultará aconsejable establecer condiciones de resistencia para las que exista un *centro* único, es decir, para las que el conjunto de esfuerzos que corresponden al máximo alejamiento a cualquier posible condición de rotura sea de la mínima dimensión posible.
- Como conclusión adicional, y desde la perspectiva del potencial explicativo que esta estrategia facilita, cabe preconizar la extensión en el uso y difusión de los métodos ligados a los conceptos de la programación lineal entre el acervo básico de los especialistas en diseño y análisis estructural.

Referencias

- [1] Jaime Cervera. El nudo extenso: sobre cómo resolver un error común en los programas de análisis matricial de estructuras de barras, escritos para el proyecto de estructuras que suelen serlo de hormigón armado. *Hormigón y Acero*, (197), 1995.
- [2] Jaime Cervera. Un criterio robusto para la medida del margen - coeficiente- de seguridad. *Informes de la Construcción*, 62(518):33 – 42, 2010.
- [3] A. Charnes and Greenberg H. J. Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 57(480), 1951.
- [4] A. Charnes, C.E. Lemke, and O.C. Zienkiewicz. Virtual work, linear programming and plastic limit analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 251(1264):110–116, 1959.
- [5] George B. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [6] R.K. Livesley. Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1853–1871, 1978.
- [7] David G. Luenberger. *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley Iberoamérica, Mexico, versión en español de m.lópez mateos edition, 1989.
- [8] Stephen G. Nash and Ariela Sofer. *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill series in industrial engineering and management sciences. McGraw-Hill, 1996.
- [9] B. G. Neal. *The plastic methods of structural analysis*. J. Wiley and Sons, Inc., New York and London, 1956.